Lecture 5 - Continuous-time Martingale

赵尉辰

南开大学 统计与数据科学学院

样本轨道

定义 1 (样本轨道 Sample path)

设$(X_t)_{t\in T}$是一个取值于E的随机过程。X 的样本轨道定义为在固定$\omega\in\Omega$情况下的映射

$$T \ni t \mapsto X_t(\omega)$$

也就是说，X的样本轨道是那些由$\omega\in\Omega$索引的，从时间集合T到状态空间E的映射的集合

$$\{t \mapsto X_\omega(t)\}_{\omega\in\Omega}$$

随机过程的连续性

定义 2 (随机过程的连续性/Continuity of stochastic process)

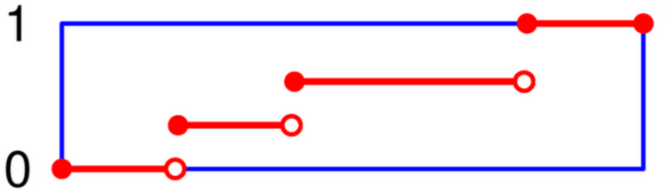
我们称一个随机过程是连续的，如果它的所有样本轨道 *almost surely* 是连续的，即

$$\mathrm{P}\left(\{\omega \in \Omega, t \mapsto X_t(\omega) \text{ 是连续的}\}\right) = 1.$$

左连续和右连续是相似定义的。

右连左极过程

我们称一个随机过程是右连左极过程，如果它的所有样本轨道 almost surely 是右连左极(cadlag, continue à droite, limite à gauche)的。



现实中我们总关心右连左极过程，例如，在金融领域，资产价格常被建模为右连左极过程（如布朗运动、跳跃过程等）。右连续性确保了在任何交易时刻，资产价格都有明确的值；左极限的存在性则有助于处理“跳跃”的情形。

随机过程的修正

有时我们并不清楚一个过程是否右连左极。接下来我们说明，只要“稍微”修正一下过程，我们就可以确保样本轨道是右连左极的。首先我们先给出“修正”的概念。

定义 3 (Modification)

设$(X_t)_{t\in T}$ *and* $(\tilde{X}_t)_{t\in T}$是两个取值于同一个状态空间E的随机过程，我们称$\tilde{X}$是X的一个修正*(Modification)*，如果

$$\forall t \in T, \quad \mathrm{P}(\tilde{X}_t = X_t) = 1.$$

鞅的右连左极修正

引理 1

设$(X_t)_{t\in T}$是一个上鞅，满足函数$t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$是右连续的，那么$X$存在一个右连左极的修正，且这个修正也是$\mathscr{F}_t$-上鞅。

特别地，每个鞅都一定存在右连左极修正，因为$\mathbb{E}[X_t]$是一个常数。

Theorem 3.18 of Le Gall[1]

之后我们总可以假设只考虑右连左极的连续时间鞅。

[1] Le Gall, Jean-François. Brownian motion, martingales, and stochastic calculus. Springer International Publishing Switzerland, 2016.

停时

定义 4 (停时 Stopping time)

随机变量$\tau : \Omega \to [0, \infty]$是一个$\mathscr{F}_t$停时，如果对任意$t \geq 0$

$$\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t,$$

τ前事件域定义为

$$\mathscr{F}_\tau := \{A \in \mathscr{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t\}.$$

例 1 (首达时 First hitting time)

令(X_t)是一个状态空间为E的右连续$\mathscr{F}_t$适应过程，对于 $A \subset E$, 那么首次到达A的时间

$$\tau_A(\omega) = \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \in A\}$$

为一个停时。

停时

例 2

令τ为一个停时，σ为一个取值于$[0,\infty]$的 $\mathscr{F}_\tau$随机变量，使得$\sigma \geq \tau$. 则σ为一个停时。特别地，定义

$$\tau_n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^n} \mathbf{1}_{\{k2^{-n} < \tau \leq (k+1)2^{-n}\}} + \infty \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=\infty\}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

为一个趋于τ的停时序列。

Proof.

由于σ是$\mathscr{F}_\tau$可测的，所以

$$\{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$$

又$\sigma \geq \tau$, 那么 $\{\sigma \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\}$， 故$\{\sigma \leq t\}$是$\mathscr{F}_t$可测的，故为一个停时。

特别地，τ_n为τ的函数，所以τ_n是$\mathscr{F}_\tau$可测的，又$\tau_n \geq \tau$，故τ_n为停时。 □

定义 5 (鞅 Martingale)

设$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathrm{P})$为一个*filtered* 概率空间, $X = (X_t)$其上的适应过程， 满足$\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$，那么称$X = (X_t)$为

(1) 一个$\mathscr{F}_t$-鞅，如果$\forall\, 0 \leq s < t,\ \mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] = X_s$;

(2) 一个$\mathscr{F}_t$-上鞅，如果 $\forall\, 0 \leq s < t,\ \mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] \leq X_s$;

(3) 一个$\mathscr{F}_t$-下鞅，如果 $\forall\, 0 \leq s < t,\ \mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] \geq X_s$.

Doob's martingale inequality

命题 1 (Doob's martingale inequality)

设(X_t)为一个右连续下鞅，那么对于所有的$c > 0$和$T < \infty$，

$$c \cdot \mathrm{P}(\sup_{0 \le t \le T} X_t \ge c) \le \mathbb{E}[X_T^+].$$

设(X_n) 为一个右连续鞅，且对某个$p \ge 1$, $\mathbb{E}|X_t|^p < \infty$. 那么对于所有的 $c > 0$和 $T < \infty$,

$$\mathrm{P}(\sup_{0 \le t \le T} |X_t| \ge c) \le \frac{\mathbb{E}|X_t|^p}{c^p}.$$

通过离散时间的结论证明，参考 Proposition 3.15 of Le Gall[2]

[2] Le Gall, Jean-François. Brownian motion, martingales, and stochastic calculus. Springer International Publishing Switzerland, 2016.

定理 1 (Convergence theorem for supermartingales)

设X为一个右连续下鞅，且$(X_t)_{t\geq 0}$是L^1有界的。那么存在一个随机变量$X_\infty \in L^1$使得

$$\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty, \quad a.s.$$

通过上穿不等式证明，参考 Theorem 3.19 of Le Gall[3]

[3] Le Gall, Jean-François. Brownian motion, martingales, and stochastic calculus. Springer International Publishing Switzerland, 2016.

定理 2 (Doob's optional stopping theorem (uniformly integrable))

设(X_t)为一个右连续一致可积鞅，那么对任意停时τ, σ 满足$\tau \leq \sigma$, 有$X_\tau, X_\sigma \in L^1$并且

$$X_\tau = E[X_\sigma \mid \mathscr{F}_\tau]$$

通过离散时间的结论证明，参考 Theorem 3.22 of Le Gall[4]

[4] Le Gall, Jean-François. Brownian motion, martingales, and stochastic calculus. Springer International Publishing Switzerland, 2016.

定理 3 (Doob's optional stopping theorem (bounded case))

设$(X_t)_{t\geq 0}$为一个右连续鞅，$\sigma \leq \tau < \infty$为两个有界停时, 那么

$$[X_\tau|\mathscr{F}_\sigma] = X_\sigma.$$

一致可积情形的推论，参考 Corollary 3.23 of Le Gall[5]

[5] Le Gall, Jean-François. Brownian motion, martingales, and stochastic calculus. Springer International Publishing Switzerland, 2016.

Doob's sampling theorem

定理 4 (Doob's sampling theorem)

设(X_t)为一个右连续鞅，τ为一个停时, 那么停止过程$X^\tau := X_{\tau\wedge t}$为一个鞅。
进一步，如果停时τ是有界的，$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

Doob's optional stopping theorem的推论，参考 Corollary 3.24 of Le Gall[6]

[6] Le Gall, Jean-François. Brownian motion, martingales, and stochastic calculus. Springer International Publishing Switzerland, 2016.